Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания
по дисциплине «Математика»
для практических занятий и самостоятельной работы студентов
направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическоеобеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
23.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

Энгельс 2025

ВВЕДЕНИЕ

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений является разделом курса «Математика», предусмотренным государственными образовательными стандартами подготовки специалистов и бакалавров. Важность этого раздела объясняется тем, что с помощью таких уравнений моделируются многие процессы в задачах естественных наук и технике. Для приложений наиболее интересны задачи с начальными или краевыми условиями. В таких задачах наряду с точными аналитическими решениями [1,2] используются также приближенные аналитические решения и численные решения. В настоящее время широко используются различные пакеты прикладных программ, таких, например, как Mathcad, Maple, MatLAB. Использование этих пакетов в учебных курсах обсуждается, например, в учебных пособиях [3,4]. Успешное использование пакетов прикладных программ возможно только грамотными пользователями, которые понимают постановку задачи и владеют различными методами решения. Настоящие методические указания предназначены для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов с целью выработки у студентов навыков решения типовых задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Дифференциальное уравнение – это соотношение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Здесь: x - независимая переменная (аргумент), y – искомая функция этого аргумента, $y', \ldots, y^{(n)}$ – производные искомой функции. Левая часть равенства (1) является заданной функцией своих аргументов. В большинстве задач, которые возникают в естественных науках и технических приложениях, эта функция является непрерывной.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (1), называют *порядком дифференциального уравнения*. В естественных науках и технических приложениях чаще встречаются уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

и уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Решить уравнение (1) – значит найти функцию, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает последнее в тождество при всех допустимых значениях аргумента. Таких функций оказывается не одна, а целое семейство. При этом мы находим *общее решение* дифференциального уравнения. Это решение можно представить в виде

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n). \qquad (2)$$

Здесь $C_1, \ldots, C_n$ – *произвольные постоянные интегрирования*, число которых совпадает с порядком уравнения. Искомое семейство функций может быть также найдено в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0. \qquad (3)$$

Равенство (3) определяет *общий интеграл дифференциального уравнения*.

Числовые значения констант интегрирования определяются, если наряду с уравнением (1) заданы *начальные условия*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (4)$$

Число начальных условий должно равняться порядку уравнения. В начальных условиях могут быть заданы значения искомой функции, а также её производных, порядок которых меньше порядка дифференциального уравнения. Уравнение (1) вместе с начальными условиями (4) представляют собой *задачу Коши (задачу с начальными условиями)*. При решении такой задачи сначала получается общее решение (2), затем на основании условий (4) составляется система уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_n$. Решение этой системы $C_1^0, \ldots, C_n^0$ подставляется в общее решение (2). В результате получается *частное*

решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (4). Частное решение представляет собой определенную функцию аргумента x. Эта функция может быть задана неявно. В этом случае получается *частный интеграл дифференциального уравнения*.

Вопросы существования и единственности решения задачи с начальными условиями рассмотрены в учебной литературе [1,2]. В рамках данных методических указаний заметим только, что в большинстве задач, связанных с инженерными приложениями, существуют решения, причем единственные.

Рассмотрим далее решения некоторых типовых задач.

2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ

Пусть требуется для дифференциального уравнения вида

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{5}$$

найти решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{6}$$

Уравнение (5) содержит искомую функцию y и производную y' в первой степени. Таким образом, уравнение (5) – линейное уравнение первого порядка. Наличие свободного слагаемого делает уравнение неоднородным.

Одним из методов отыскания общего решения уравнения (5) является *метод вариации произвольной постоянной*. Применение этого метода для решения задачи вида (5),(6) поясним следующим примером

Пример 1.

Требуется решить уравнение

$$y' + \frac{n}{x}y = \frac{2}{x^n} \tag{7}$$

при начальном условии

$$y(1) = 0. \tag{8}$$

1. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y' + \frac{n}{x}y = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать, разделив переменные:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{n}{x}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{n}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{n}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -n\ln|x| + \ln A.$$

В результате получим

$$y = \frac{A}{x^n}.$$

2. Используем полученное общее решение однородного уравнения. Будем искать общее решение данного неоднородного уравнения в виде

$$y = \frac{A(x)}{x^n}. \qquad (9)$$

Примечание: *Подстановка на место постоянной* A *неизвестной функции* $A(x)$ *называется вариацией произвольной постоянной.*

Подставляя выражение (9) в уравнение (7), получим:

$$\left(\frac{A(x)}{x^n}\right)' + \frac{n}{x}\frac{A(x)}{x^n} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{A'(x)x^n - A(x)nx^{n-1}}{x^{2n}} + n\frac{A(x)}{x^{n+1}} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'(x)}{x^n} - n\frac{A(x)}{x^{n+1}} + n\frac{A(x)}{x^{n+1}} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 2.$$

Интегрируем полученное уравнение, разделив переменные:

$$\frac{dA(x)}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dA(x) = 2dx \quad \Rightarrow \quad \int dA(x) = \int 2dx \quad \Rightarrow \quad A(x) = 2x + C.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (9), получим:

$$y = \frac{2x + C}{x^n} = \frac{C}{x^n} + \frac{2}{x^{n-1}}. \qquad (10)$$

В формуле (10) общее решение неоднородного уравнения представлено как сумма двух слагаемых: первое совпадает с общим решением однородного уравнения, второе является частным решением неоднородного уравнения.

3. Определим числовое значение постоянной C из начального условия (8):

$$\frac{2 \cdot 1 + C}{1^n} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

Тогда искомое решение задачи с начальным условием:

$$y(x) = \frac{2(x-1)}{x^n}.$$

Для выработки навыков решения линейных уравнений первого порядка рекомендуется самостоятельно выполнить следующее задание.

Задание 1.

Найти решение задачи с начальным условием

1) $xy' - 2y = x^3 e^x, \qquad y(1) = e.$

2) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4, \qquad y(0) = 0.$

3) $x^2 y' + 2xy = \cos x, \qquad y(\pi) = 1.$

4) $xy' + y = x + 1, \qquad y(2) = 0.$

5) $y' \cos x - y \sin x = 4x^3, \qquad y(0) = 1.$

6) $y' - y \cos x = 2x \exp(\sin x), \quad y(0) = \pi.$

7) $x^2 y' + 2xy = 1, \qquad y(1) = 1.$

8) $y' + 2xy = 2x \exp(-x^2), \qquad y(0) = 1.$

9) $2xy' - y = 2x^{3/2} \cos x, \qquad y(\pi) = 0.$

10) $y' + y \operatorname{tg} x = 2x \cos x, \qquad y(0) = 4.$

3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + q = f(x), \quad p, q = const$$

может быть получено как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + q = 0$$

и частного решения данного неоднородного уравнения. Чтобы найти общее решение однородного уравнения, определим корни k_1, k_2 характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0$$

и применим одну из стандартных формул:

$y_{одн} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$ если $k_1 \neq k_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R},$

$y_{одн} = e^{kx}(C_1 + C_2 x),$ если $k_1 = k_2 = k, \quad k \in \mathbf{R},$

$y_{одн} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$ если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

Частное решение рекомендуется построить методом неопределенных коэффициентов, ориентируясь по виду функции $f(x)$ в правой части уравнения. Наиболее распространенные случаи рассмотрены в учебном пособии [2]. Рассмотрим далее пример.

Пример 2.

Требуется найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5 = 2e^{3x} \qquad (11)$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -3/4. \qquad (12)$$

1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 2 \pm i.$$

Тогда

$$y_{одн} = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$$

– общее решение однородного уравнения, соответствующего данному.

2. Исходя из вида правой части уравнения (11), будем искать частное решение этого уравнения в форме $Y = Ae^{3x}$. Тогда:

$$\left(Ae^{3x}\right)'' - 4\left(Ae^{3x}\right)' + 5Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow 9Ae^{3x} - 12Ae^{3x} + 5Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow 2A = 2.$$

Получили $A = 1$, следовательно, $Y = e^{3x}$.

3. Общее решение данного неоднородного уравнения представим в виде

$$y = y_{одн} + Y.$$

В результате получим общее решение:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{3x}. \qquad (13)$$

Дифференцируя выражение (13), находим:

$$y' = 2e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{2x}\left(-C_1 \sin x + C_2 \cos x\right) + 3e^{3x}.$$

Учитываем начальные условия (12):

$$2 = e^0\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) + e^0,$$

$$-\frac{3}{4} = 2e^0\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) + e^0\left(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0\right) + 3e^0.$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 2, \\ 2C_1 + C_2 + 3 = -3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -23/4. \end{cases}$$

Получили частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x) = e^{2x}\left(\cos x - \frac{23}{4}\sin x\right) + e^{3x}.$$

Для выработки навыков решения линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами рекомендуется самостоятельно выполнить следующее задание.

Задание 2.

Найти решение задачи с начальными условиям

1) $y'' - 9y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
2) $y'' - 4y = x - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
3) $y'' + 2y' + y = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4) $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5) $y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
6) $y'' - 2y' - 8y = 16x + 4$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
7) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
8) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
9) $y'' + y = \cos 3x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 1$.
10) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.

4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим далее задачу об общем решении системы дифференциальных уравнений. Ограничимся случаем, когда выполняются следующие условия:

1) система содержит уравнения первого порядка, разрешенные относительно производных;
2) независимая переменная не входит явно в уравнения;
3) уравнения линейные с постоянными коэффициентами, однородные.

Система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n, \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{1n}x_1 + \ldots a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Здесь через x_i, $i = 1, \ldots n$ обозначены искомые функции.

Возможна также матричная форма записи системы

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}. \tag{14}$$

Здесь

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы (14) допускает представление

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_1 + \ldots C_n\mathbf{X}_n. \qquad (15)$$

В формуле (15) $C_1,\ldots,C_n$ – произвольные постоянные интегрирования, $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n$ – линейно независимые частные решения системы. Частные решения можно найти в виде

$$\mathbf{X}_i = \exp(\lambda_i t)\begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \exp(\lambda_i t)\mathbf{P}_i, \quad i = 1,\ldots n.$$

Здесь $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, которые получаются как корни характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \qquad (16)$$

Вектор-столбец $\mathbf{P}_i$ является ненулевым решением неопределенной системы линейных алгебраических уравнений.

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{P} = \mathbf{0}. \qquad (17)$$

Рассмотрим примеры при $n = 2$. Тогда характеристическое уравнение (16) – квадратное. В зависимости от вида корней λ_1, λ_2 следует различать три случая, каждый из которых будет далее разобран.

Пример 3.

Требуется найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение (16) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_1 = 1 \quad \textit{или} \quad \lambda = \lambda_2 = 4.$$

Получили два различных действительных собственных значения.

При $\lambda_1 = 1$ система (17) для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\begin{cases} (2-1)p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 + (3-1)p_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 + 2p_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = -2p_2.$$

Полагая $p_2 = 1$, получим $p_1 = -2$. Возникает частное решение системы

$$\mathbf{X}_1 = e^t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 4$ система (17) для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\begin{cases} (2-4)p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 + (3-4)p_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 - p_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = p_2.$$

Полагая $p_2 = 1$, получим $p_1 = 1$. Возникает частное решение системы

$$\mathbf{X}_2 = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используя выражение (15), построим общее решение сначала в матричном виде

$$\mathbf{X} = C_1 e^{t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а затем – в скалярной форме

$$x_1 = -2C_1 e^{t} + C_2 e^{4t}, \quad x_2 = C_1 e^{t} + C_2 e^{4t}.$$

Пример 4.

Требуется найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Составив и решив характеристическое уравнение, получим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(1-\lambda^2) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Получили комплексно сопряженные собственные значения.

При $\lambda = i$ система (17) для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\begin{cases} (1-i)p_1 - 2p_2 = 0 \\ p_1 + (-1-i)p_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = (1+i)p_2.$$

Полагая $p_2 = 1$, получим $p_1 = (1+i)$. Возникает частное решение системы

$$\mathbf{X}_1 = \exp(it)\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos t + i\sin t)\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + i\sin t + i\cos t - \sin t \\ \cos t + i\sin t \end{bmatrix}.$$

Выделяя действительную и мнимую части решения, получим

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Действительная часть $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ и мнимая часть $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ сами являются линейно независимыми частными решениями данной системы дифференциальных уравнений. Используя эти частные решения, представим общее решение системы в виде

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{U} + C_2\mathbf{V}.$$

Тогда

$$\mathbf{X} = C_1 \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Найденное решение можно также представить в скалярной форме

$$x_1 = C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\sin t + \cos t), \quad x_2 = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

а затем сгруппировать в компонентах решения подобные слагаемые:

$$x_1 = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t, \quad x_2 = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Пример 5.

Требуется найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Составив и решив характеристическое уравнение, получим

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - (5+3)\lambda + (5\cdot 3 - (-1)\cdot 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 4.$$

Получили два равных действительных собственных значения.

С учетом собственного значения $\lambda = 4$ представим искомое общее решение системы в виде

$$\mathbf{X} = e^{4t}\begin{bmatrix} a_1 t + a_0 \\ b_1 t + b_0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Здесь a_1, a_0, b_1, b_0 - неопределенные константы. Подставим выражение (18) в матричную форму записи системы (14). Получим:

$$e^{4t}\begin{bmatrix} 4(a_1 t + a_0) + a_1 \\ 4(b_1 t + b_0) + b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot e^{4t}\begin{bmatrix} a_1 t + a_0 \\ b_1 t + b_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4a_1 t + (4a_0 + a_1) \\ 4b_1 t + (4b_0 + b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5a_1 - b_1)t + (5a_0 - b_0) \\ (a_1 + 3b_1)t + (a_0 + 3b_0) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} 4a_1 t + (4a_0 + a_1) = (5a_1 - b_1)t + (5a_0 - b_0), \\ 4b_1 t + (4b_0 + b_1) = (a_1 + 3b_1)t + (a_0 + 3b_0). \end{cases} \tag{19}$$

Система (19) позволяет установить между неопределенными константами a_1, a_0, b_1, b_0 такие зависимости, при которых выражение (18) будет представлять общее решение данной системы.

Потребуем, чтобы первое уравнение системы (19) удовлетворялось при всех значениях аргумента t. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях аргумента в левой и правой частях. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4a_0 + a_1 = 5a_0 - b_0. \end{cases} \tag{20}$$

Система (20) – неопределенная. Выразим с её помощью константы b_1, b_0 через a_1, a_0. Получим:

$$\begin{cases} b_1 = a_1, \\ b_0 = -a_1 + a_0. \end{cases} \tag{21}$$

Примечание: *Если рассмотреть второе уравнение системы (19), то мы получим для связей между константами ту же систему (21). Проверку этого утверждения рекомендуется выполнить самостоятельно.*

Полагаем далее, что $a_1 = C_1$, $a_0 = C_2$. Величины C_1, C_2 выступают в роли неопределенных констант интегрирования в общем решении системы.

Тогда выражение для общего решения (18) принимает вид

$$\mathbf{X} = e^{4t}\begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1 t + C_2 - C_1 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме общее решение данной системы представляется в виде

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2), \quad x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1).$$

Для выработки навыков решения систем линейных дифференциальных уравнений рекомендуется самостоятельно выполнить следующее задание.

Задание 3.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

1) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 5x_2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 6x_2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -5x_1 - 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -8x_1 - 5x_2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 8x_2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -5x_1 - 8x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 3x_2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -4x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_2. \end{cases}$

5. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Общее решение уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ можно получить путем повторного интегрирования правой части.

Пример 6.

Найти общее решение уравнения $y^{(3)} = \sin 2x$.

Получим:

$$y^{(3)} = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad y^{(2)} = \frac{-1}{2}\cos 2x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}\cos 2x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

2. Общее решение уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \dots y^{(n)}) = 0$ можно получить путем введения новой неизвестной функции

$$y^{(k)} = z(x). \tag{22}$$

Для этой функции получается вспомогательное уравнение

$$F(x, z, \dots z^{(n-k)}) = 0,$$

порядок которого меньше, чем порядок исходного уравнения. Получив общее решение вспомогательного уравнения, подставляем его в правую часть равенства (22). Затем восстанавливаем искомую функцию. Для этого интегрируем уравнение (22) так, как было показано ранее в данном разделе.

Пример 7.

Найти общее решение уравнения $xy'' + y' + x = 0$.

Получим:

$$xy'' + y' + x = 0 \quad (\textit{полагая } y' = z(x)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z' + \frac{1}{x}z = -1 \quad (\textit{линейное уравнение первого порядка}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} + C_2.$$

3. Уравнение вида $F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$ не содержит явным образом независимую переменную *x*. Порядок такого уравнения понижается на единицу, если принять, что $y' = p(y)$. В качестве примера найдем общее решение уравнения:

Пример 8.

Найдем общее решение уравнения $1+(y')^2 = yy''$.

Получим:

$$1+(y')^2 = yy'' \quad \Rightarrow \quad 1+p^2 = y\frac{dp}{dy}p \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int\frac{2pdp}{1+p^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right) = \ln y + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad 1+p^2 = (C_1 y)^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{(C_1 y)^2 - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \pm\int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_1}\ln\left|C_1 y + \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}\right| = \pm x + C_2.$$

Получили общий интеграл данного уравнения.

Для выработки навыков понижения порядка при решении дифференциальных уравнений рекомендуется самостоятельно выполнить следующее задание.

Задание 4.

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1) $y''y^3 = 1.$
2) $y''' = (y'')^3.$
3) $(x-1)y'' - y' = x(x-1)^2.$
4) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$
5) $yy'' + (y')^2 = 0.$
6) $xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right).$
7) $(1-x^2)y'' = xy'.$
8) $xy'' + y' = x^2.$
9) $xy''' + y'' = 1 + x.$
10) $y'' = -\frac{x}{y'}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б.Горстко, Я.М.Ерусалимский. – СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 960 с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2ч. Ч.2: Учебн. пособие для вузов / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова, С.П.Данко. – М.: ООО «Издательство Оникс», ООО « Издательство «Мир и Образование» », 2008. – 448 с.
3. Черняк А.А. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс / А.А.Черняк, Ж.А.Черняк, Ю.А.Долманова. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 608 с.
4. Линьков В.М., Яременко Н.Н. Высшая математика в примерах и задачах. Компьютерный практикум. / Под ред. А.А.Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 320 с.